Hong Kong Mathematics Olympiad (2009 – 2010)
Heat Event (Individual)
香港数学竞赛 (2009 – 2010)
初赛项目(个人)

除非特别声明，答案须用数字表达，并化至最简。
Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest form.

1. 把 8 个完全相同的球放入三个不同的盒中，使得每个盒内至少有球一个，问共有多少个不同的分配方法?

   In how many possible ways can 8 identical balls be distributed to 3 distinct boxes so that every box contains at least one ball?

2. 若 α 及 β 为二次方程 $x^2-x-1=0$ 的两个实根，求 $\alpha^6+8\beta$ 的值。

   If α and β are the two real roots of the quadratic equation $x^2-x-1=0$, find the value of $\alpha^6+8\beta$.

3. 若 $a=\frac{1}{5\times 10}+\frac{1}{10\times 15}+\frac{1}{15\times 20}+\cdots+\frac{1}{100\times 105}$，求 a 的值。

   If $a=\frac{1}{5\times 10}+\frac{1}{10\times 15}+\frac{1}{15\times 20}+\cdots+\frac{1}{100\times 105}$, find the value of a.

4. 已知 $x+y+z=3$ 及 $x^3+y^3+z^3=3$，且 x，y，z 为整数。若 $x<0$，求 y 的值。

   Given that $x+y+z=3$ and $x^3+y^3+z^3=3$, where x, y, z are integers. If $x<0$, find the value of y.

5. 已知 a，b，c，d 为正整数，且满足 $\log_a b=\frac{1}{2}$ 及 $\log_c d=\frac{3}{4}$。若 $a-c=9$，求 $b-d$ 的值。

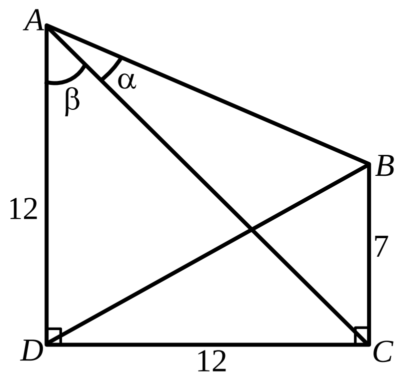
   Given that a, b, c, d are positive integers satisfying $\log_a b=\frac{1}{2}$ and $\log_c d=\frac{3}{4}$. If $a-c=9$, find the value of $b-d$.

6. 若 $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=1$，其中 $0\le x$, $y\le 1$。求 x^2+y^2 的值。

If $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=1$, where $0\le x$, $y\le 1$. Find the value of x^2+y^2.

7. 在图二中， $ABCD$ 是一梯形。 AD， BC 和 DC 的长分别为 12 , 7 和 12 。若 DC 分别垂直于 AD 及 BC， 求 $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ 的值。

In Figure 1, $ABCD$ is a trapezium. The lengths of segments AD, BC and DC are 12 , 7 and 12 , respectively. If segments AD and BC are both perpendicular to DC, find the value of $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$.

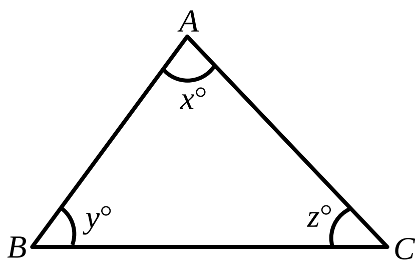


图一

Figure 1

8. 在图二中，ΔABC 满足： $x\ge y\ge z$ 及 $4x=7z$ 。若 x 的最大值是 m， x 的最小值是 n，求 $m+n$ 的值。

In Figure 2, ABC is a triangle satisfying $x\ge y\ge z$ and $4x=7z$. If the maximum value of x is m and the minimum value of x is n, find the value of $m+n$.



图二

Figure 2

9. 把 1, 2, ..., n $(n \geq 3)$ 作环形排列；使得每两个相邻的数字相差为 1 或 2。求有多少个此类的环形排列。

Arrange the numbers 1, 2, ..., n $(n \geq 3)$ in a circle so that adjacent numbers always differ by 1 or 2. Find the number of possible such circular arrangements.

10. 若 $\lfloor x \rfloor$ 为最大的整数小于或等于 x， 求以下 2010 个数中共有多少个不同的值：

$$\left\lfloor \frac{1^2}{2010} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{2^2}{2010} \right\rfloor, \ldots, \left\lfloor \frac{2010^2}{2010} \right\rfloor。$$

If $\lfloor x \rfloor$ is the largest integer less than or equal to x, find the number of distinct values in the following 2010 numbers:

$$\left\lfloor \frac{1^2}{2010} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{2^2}{2010} \right\rfloor, \ldots, \left\lfloor \frac{2010^2}{2010} \right\rfloor.$$